

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Дополнительные главы теории вероятностей и теории меры
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Математика
	Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
	кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: Н.В. Богачев, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2022

## Аннотация

Курс посвящен изучению различных вероятностных моделей, относящихся к теории случайных процессов и математической статистике. Будут рассмотрены классические модели, как с дискретным, так и непрерывным временем, а также их применения в математической статистике. От слушателей потребуется знание базового курса теории вероятностей и математической статистики (в любом варианте).

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

Познакомить студентов с различными вероятностными моделями, относящимися к теории случайных процессов и математической статистике.

#### Задачи дисциплины

- Делать правильные выводы из сопоставления результатов теории и эксперимента;
- алгоритмизировать процесс построения математической модели явления;
- делать качественные выводы по результатам математического моделирования;
- получать наилучшие оценки изучаемых параметров и правильно оценивать степень их достоверности.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

новые научные результаты	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- Аксиоматику современной теории вероятностей;
- методы оценивания параметров вероятностных распределений;
- построение доверительных интервалов;
- статистические выводы, проверка гипотез;
- линейная и полиномиальная регрессия;
- понятие измеримой функции (случайной величины) и виды сходимости их последовательностей.

уметь:

- Условные математические ожидания и их свойства;
- основные понятия теории мартингалов,
- методы фильтрации для линейных моделей случайных процессов;
- делать правильные выводы из сопоставления результатов теории и эксперимента;
- алгоритмизировать процесс построения математической модели явления;
- делать качественные выводы по результатам математического моделирования;
- получать наилучшие оценки изучаемых параметров и правильно оценивать степень их достоверности.

владеть:

- Навыками освоения большого объема информации;
- навыками грамотной обработки результатов опыта и сопоставления с теоретическими данными;
- практикой исследования и решения теоретических и прикладных задач;
- навыками теоретического анализа вероятностных процессов.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Напоминание основных концепций базового курса теории меры	6	6		15
2	Дополнительное обсуждение сигма-алгебр	6	6		15
3	Суслинские множества как проекции	6	6		15
4	Преобразования мер.	6	6		15

5	Слабая топология пространств интегрируемых функций	6	6		15
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

1. Напоминание основных концепций базового курса теории меры

Сигма-алгебры, меры, измеримые функции, интеграл Лебега.

2. Дополнительное обсуждение сигма-алгебр

теорема Дуба. Борелевские множества. Операция Суслина и суслинские множества.

3. Суслинские множества как проекции

Сохранение измеримости при операции Суслина. Отображения суслинских множеств. Борелевские меры. Радоновские меры. Теоремы об измеримом выборе.

4. Преобразования мер.

Условные меры и условные математические ожидания. Существование условных мер.

5. Слабая топология пространств интегрируемых функций

Слабая компактность и равномерная интегрируемость. Слабая сходимости мер. Норма Канторовича. Слабая компактность. Теорема Прохорова. Представление Скорохода.

#### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

#### 6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Задачи по теории вероятностей [Текст] / А. Н. Ширяев, М., МЦНМО, 2006

Дополнительная литература

1. Теория случайных процессов в примерах и задачах [Текст] : [учеб. пособия для вузов] / Б. М. Миллер, А. Р. Панков; под ред. А. И. Кибзуна .— М : ФИЗМАТЛИТ, 2002 .— 320 с.

#### 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

#### 8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

#### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Математика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	<u>3</u>
<b>квалификация:</b>	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Дифференцированный зачет	
<b>Разработчик:</b>	Н.В. Богачев, канд. физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дополнительные главы теории вероятностей и теории меры» обучающийся должен:

**знать:**

- Аксиоматику современной теории вероятностей;
- методы оценивания параметров вероятностных распределений;
- построение доверительных интервалов;
- статистические выводы, проверка гипотез;
- линейная и полиномиальная регрессия;
- понятие измеримой функции (случайной величины) и виды сходимости их последовательностей.

**уметь:**

- Условные математические ожидания и их свойства;
- основные понятия теории мартингалов,
- методы фильтрации для линейных моделей случайных процессов;
- делать правильные выводы из сопоставления результатов теории и эксперимента;
- алгоритмизировать процесс построения математической модели явления;
- делать качественные выводы по результатам математического моделирования;
- получать наилучшие оценки изучаемых параметров и правильно оценивать степень их достоверности.

**владеть:**

- Навыками освоения большого объема информации;
- навыками грамотной обработки результатов опыта и сопоставления с теоретическими данными;
- практикой исследования и решения теоретических и прикладных задач;
- навыками теоретического анализа вероятностных процессов.

### **3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю**

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия или в конце занятия по пройденной теме.

### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

- 1) Определения вероятностного пространства и случайной величины.
- 2) Функция распределения случайной величины и ее свойства.
- 3) Характеристическая функция ее свойства
- 4) Оценки среднего и дисперсии случайной величины
- 5) Сходимость последовательности случайных величин по вероятности. Примеры.
- 6) Сходимость последовательности случайных величин с вероятностью единица. Примеры.
- 7) Связь сходимости последовательности случайных величин по вероятности и с вероятностью единица. Примеры.
- 8) Интеграл Лебега от простых функций. Общее определение интеграла Лебега.
- 9) Абсолютная непрерывность мер. Теорема Радона-Никодима.
- 10) Замена переменных в интеграле Лебега. Теорема Фубини.
- 11) Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.
- 12) Лемма Фату.
- 13) Условные математические ожидания и условные вероятности. Определения. Основные свойства.
- 14) Мартингалы и полумартингалы. Примеры.
- 15) Неравенства для мартингалов.
- 16) Остановленные мартингалы, тождества Вальда.

### **Критерии оценивания**

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений

- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.